

Equations différentielles.① Définition :

f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} . On pose : $y = f(x)$

on a : $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Dans ce cours les nombres a et b sont toujours des réels.

Déf : L'équation :

$$(E) : y'' + ay' + by = g(x)$$

est une équation différentielle de second degré

y est la fonction inconnue.

Expl : 1) $y'' + 3y' - y = 0$

2) $y'' + y = x^2 + 1$

3) $y' - y = \sin(x)$

② Equation de type : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'éq $y' + ay = 0$

sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-ax} \quad (\text{avec : } \lambda \in \mathbb{R})$$

EX.1 Résoudre les éq-diff :

1) $y' + 3y = 0$

2) $y' - \sqrt{2}y = 0$

3) $y' + \frac{5}{4}y = 0$

③ Eq de type : $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'éq-diff :

$$(E) : y'' + ay' + by = 0$$

et son équation caractéristique :

$$(*) \quad r^2 + ar + b = 0$$

1^{er} cas si $(*)$ admet deux solutions

réels r_1 et r_2 alors :

les solutions de (E) sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

avec : $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$\lambda = \text{"lambda"}$ et $\mu = \text{"mu"}$

2^{ème} cas si $(*)$ admet une seule

solution réel : r alors :

les solutions de l'éq-diff (E) sont

les fonctions :

$$x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{rx}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3^{ème} cas : Si $(*)$ admet deux

solutions complexes z_1 et z_2

on a : $z_1 = a - bi$; $z_2 = a + bi$

les solutions de (E) sont les

fonctions :

$$x \mapsto e^{ax} (\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))$$

(avec : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

EX:2 Résoudre les éq-diff :

1°/ $y'' + 3y' + 2y = 0$

2°/ $y'' - 2y' + y = 0$

3°/ $y'' - 2y' + 5y = 0$

Exercices de révisions :

Ex. 1 Résoudre dans \mathbb{R} les éq :

① $e^{3x} - 1 = 0$ ② $e^{5x-1} - e^{x^2+5} = 0$
③ $\ln(e^x - 1) = 1$ ④ $\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$

Ex. 2 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

① $3 - e^{-x} > 0$ ② $\frac{e^x - 3}{e^x - 1} < 0$
③ $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$
④ $e^{-2x} + 3e^{-x} + 2 > 0$

Ex. 3 ① Trouver le domaine de déf des fcts suivantes :

① $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 - 1}$; ② $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x - 2}$

② Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1° $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. 2° $f(x) = e^{\sin(3x)}$

3° $f(x) = \ln(x^2 + 1)e^{x^2 - 1} + \frac{1}{x}$

Ex. 4 Calculer les limites :

1° $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ 2° $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x - e^{-x})$

3° $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2x^2 - x)$ 4° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{2x}$

Ex. 5 f définie sur $[-3, 0]$ par :

$$f(x) = 1 - xe^x$$

1° Donner le tableau de variation de la fonction f sur $[-3, 0]$

2° Construire la courbe (C_f)

• Devoir maison • n°1 2^{ème} semestre

à rendre le vendredi 06/03/2020

Ex. 1 $f(x) = e^x - 2x$

1° Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ sachant que : $e \simeq 2,7$ et $e^2 \simeq 7,4$

2° Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f .

3° Donner l'équation des deux tangentes à (C_f) aux points d'abscisses : $x = \ln(2)$ et $x = 0$

4° Construire (C_f)

Ex. 2 Résoudre les équations différentielles :

1° $y' + 4y = 0$

2° $y'' + 4y' + 4 = 0$

3° $y'' + y' + y = 0$

Ex. 3

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

2) On considère les trois points : A, B et C avec : $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \text{ et } z_C = \overline{z_B}$$

2-a) écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

2-b) Montrer que : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

3) Vérifier que : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\pi/3}$

4) Déterminer la nature du triangle OBC .

Bon courage!

on a également si $0 < \alpha < \pi$ (valeurs pour lesquelles $\cotg \alpha$ est défini) :

$$1 + \cotg^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

EXERCICES

1. On donne $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin \alpha$ et $\tg \alpha$.

2. Simplifier :

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

[utiliser l'identité remarquable vérifiée quels que soient a et b réels :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3].$$

1. 3. RELATIONS ENTRE LES LIGNES TRIGONOMETRIQUES DE α ET $\pi - \alpha$

Soit l'arc \widehat{AM} de mesure α (fig. 3) et l'arc $\widehat{AM'}$ de mesure $\pi - \alpha$. On obtient $\pi - \alpha$ en retranchant à la mesure de $\widehat{AA'}$ celle de $\widehat{A'M'}$ qui est égale à celle de \widehat{AM} . Les arcs $\widehat{A'M'}$ et \widehat{AM} ayant même mesure sont symétriques par rapport à la droite (OB). Il en résulte que M et M' ont des abscisses opposées et même ordonnée. Par suite pour tout α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) :

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

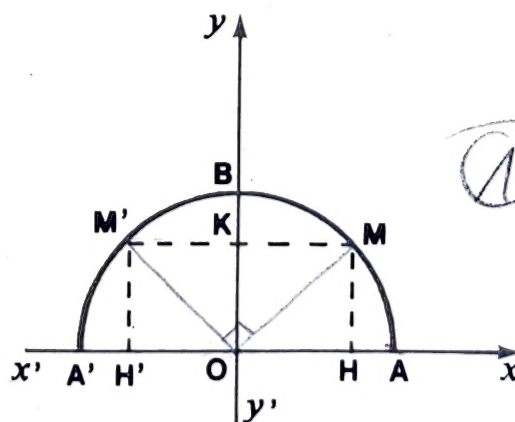


fig. 3

Pour $0 \leq \alpha \leq \pi$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\pi - \alpha) \neq 0$ et le quotient $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)}$ est défini et on peut écrire :

$$\tg(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha}$$